SÉRIES TEMPORELLES. EXAMEN PARTIEL (2H).

(English version at the back)

Documents et appareils électroniques non autorisés. Les exercices sont mutuellement indépendants. Toute réponse doit être justifiée et lisible. La qualité de la rédaction pourra être prise en compte dans la notation. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif. Vous pouvez répondre en français ou en anglais.

Exercice 1. (Résolution des équations ARMA). [10pts] Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance un. Pour chacune des équations ARMA suivantes, discuter de l'existence et du nombre de solutions stationnaires, en vous appuyant sur un théorème du cours. Lorsqu'elles existent, déterminer les solutions stationnaires *linéaires*.

(1) $X_t = 2X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**
(2) $X_t + X_{t-1} = Z_t - Z_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**
(3) $X_t + X_{t-1} = Z_t - Z_{t-2}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**
(4) $6X_t - 5X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**
(5) $X_t - 4X_{t-1} + 4X_{t-2} = Z_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. **[2pts]**

Exercice 2. (Rapide ou pas). [3pts] Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance un. On considère l'équation ARMA(1,2) suivante:

$$X_t - X_{t-1} = Z_t - Z_{t-2}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Trouver une solution stationnaire qui ne soit *pas* à décorrélation rapide (en justifiant).

Exercice 3. (Filtres à valeurs complexes). [7pts] Soit $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ l'espace de Banach* des suites bi-infinies à valeurs *complexes* qui sont *absolument sommables*, i.e.

$$\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C}) = \Big\{\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \colon \|\alpha\|_1 < +\infty\Big\}, \qquad \text{où} \quad \|\alpha\|_1 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|$$

et $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe. On notera de la même manière $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ l'espace de Banach des suites bi-infinies à valeurs *réelles* et absolument sommables.

(1) Soient $\alpha, \beta \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Montrer que le produit de *convolution* $\alpha \star \beta$, tel que

$$(\alpha \star \beta)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

est bien défini comme élément de $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ et vérifie $\|\alpha \star \beta\|_1 \le \|\alpha\|_1 \times \|\beta\|_1$. **[2pts]**

(2) Soit $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. On note $\bar{\alpha}$ le conjugué (complexe) de α, défini par $(\bar{\alpha})_k = \overline{\alpha_k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer *soigneusement* que $\alpha \star \bar{\alpha} \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. **[2pts]**

(3) Soit $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. On définit $\mathsf{P}_0(\alpha) = \mathbf{e}$ (élément neutre pour l'opération de convolution) et $\mathsf{P}_n(\alpha) = \mathsf{P}_{n-1}(\alpha) \star \alpha$ pour tout entier $n \ge 1$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la série

$$\mathsf{S}(\lambda,\alpha) := \sum_{n\ge 0} \frac{\lambda^n}{n!} \mathsf{P}_n(\alpha)$$

est bien définie comme élément de $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Montrer que $\mathsf{S}(\lambda,\alpha)$ est inversible (pour l'opération de convolution) et déterminer son inverse. **[3pts]**

Date: Vendredi 31 octobre 2025.

*espace vectoriel normé complet

(Version française au dos)

Documents and electronic devices are not allowed. The exercises are mutually independent. Answers must be justified and readable. The quality of writing may be taken into account in the grading. The marking scheme is provided for guidance only. You may answer in French or English.

Exercise 1. (Solving of ARMA equations). **[10pts]** Let $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a white noise with zero mean and unit variance. For each of the following ARMA equations, discuss the existence and number of stationary solutions, with the help of a theorem seen in class. When they exist, determine the *linear* stationary solutions.

(1) $X_t = 2X_{t-1} + Z_t$ for every $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**

(2) $X_t + X_{t-1} = Z_t - Z_{t-1}$ for every $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**

(3) $X_t + X_{t-1} = Z_t - Z_{t-2}$ for every $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**

(4) $6X_t - 5X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t$ for every $t \in \mathbb{Z}$; **[2pts]**

(5) $X_t - 4X_{t-1} + 4X_{t-2} = Z_t$ for every $t \in \mathbb{Z}$. **[2pts]**

Exercise 2. (Fast or not). **[3pts]** Let $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a white noise with zero mean and unit variance. We consider the following ARMA(1,2) equation:

$$X_t - X_{t-1} = Z_t - Z_{t-2}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Find a stationary solution whose correlation function do *not* decay fast to zero (justify).

Exercise 3. (Complex-valued filters). **[7pts]** Let $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ be the Banach space[†] of bi-infinite and *complex*-valued sequences which are *absolutely summable*, i.e.

$$\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C}) = \Big\{\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \colon \|\alpha\|_1 < +\infty\Big\}, \qquad \text{where} \quad \|\alpha\|_1 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|$$

and $|\cdot|$ denotes the modulus of a complex number. In a similar fashion we write $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ for the Banach space of bi-infinite, *real*-valued and absolutely summable sequences.

(1) Let $\alpha, \beta \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Show that the *convolution* product $\alpha \star \beta$, such that

$$(\alpha \star \beta)_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

is a well-defined element of $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ and verify that $\|\alpha \star \beta\|_1 \le \|\alpha\|_1 \times \|\beta\|_1$. **[2pts]**

(2) Let $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. We denote $\bar{\alpha}$ the (complex) conjugate of α, defined as $(\bar{\alpha})_k = \overline{\alpha_k}$ for every $k \in \mathbb{Z}$. *Carefully* show that $\alpha \star \bar{\alpha} \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. **[2pts]**

(3) Let $\alpha \in \ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. We define $\mathsf{P}_0(\alpha) = \mathbf{e}$ (neutral element for the convolution operation) and $\mathsf{P}_n(\alpha) = \mathsf{P}_{n-1}(\alpha) \star \alpha$ for every integer $n \ge 1$. Show that for every $\lambda \in \mathbb{C}$, the series

$$\mathsf{S}(\lambda, \alpha) := \sum_{n\ge 0} \frac{\lambda^n}{n!} \mathsf{P}_n(\alpha)$$

is a well-defined element of $\ell_1(\mathbb{Z},\mathbb{C})$. Show that $\mathsf{S}(\lambda,\alpha)$ is invertible (with respect to the convolution operation) and determine its inverse. **[3pts]**

[†] complete normed vector space

Corrigé.

Exercice 1. Notons à chaque fois ARMA(Φ, Θ) ces équations et $\mathbb{U}$ le cercle unité dans le plan complexe.

(1) $\Phi(z) = 1 - 2z$ a pour unique racine $1/2 \notin \mathbb{U}$, et $\Theta(z) = 1$. De plus,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{1-2z} = -\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = -\sum_{k\geq 1}\Big(\frac{1}{2z}\Big)^k. \tag{1}$$

D'après le cours, l'équation a une unique solution stationnaire, qui est linéaire, et qui s'écrit :

$$X_t = -\sum_{k\geq 1} 2^{-k} Z_{t+k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

(2) $\Phi(z) = 1 + z$ a pour unique racine $-1 \in \mathbb{U}$, qui n'est pas compensée par $\Theta(z) = 1 - z$, dont l'unique racine est 1. L'équation n'a donc aucune solution stationnaire.

(3) $\Phi(z) = 1 + z$ a pour unique racine $-1 \in \mathbb{U}$, qui est compensée par $\Theta(z) = 1 - z^2 = (1 - z)(1 + z)$. Il y a donc une infinité de solutions stationnaires, parmi lesquelles une seule est linéaire : c'est la solution de l'équation réduite ARMA($\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Theta}$) où $\widetilde{\Phi}(z) = 1$ et $\widetilde{\Theta}(z) = 1 - z$, c'est-à-dire $X_t = Z_t - Z_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

(4) $\Phi(z) = 6 - 5z + z^2 = (z - 2)(z - 3)$ n'a aucune racine dans $\mathbb{U}$ et $\Theta(z) = 1$. De plus,

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = (\ldots) = \sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\Big)z^k. \tag{3}$$

Ainsi, l'équation a une unique solution stationnaire, qui est linéaire, et qui s'écrit:

$$X_t = \sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\Big)Z_{t-k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

(5) $\Phi(z) = 1 - 4z + 4z^2 = (1 - 2z)^2$ n'a aucune racine dans $\mathbb{U}$ et $\Theta(z) = 1$. De plus, en dérivant (1) on obtient

$$\forall z \in \mathbb{U}, \qquad \frac{1}{(1-2z)^2} = \sum_{k\geq 2}(k-1)\Big(\frac{1}{2z}\Big)^k \tag{5}$$

Ainsi, l'équation a une unique solution stationnaire, qui est linéaire, et qui s'écrit:

$$X_t = \sum_{k\geq 2}(k-1)2^{-k} Z_{t+k}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Exercice 2. En suivant le même raisonnement que dans l'équation (3) de l'exercice 1, on obtient comme unique solution stationnaire linéaire $U_t := Z_t + Z_{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, qui est à décorrélation rapide d'après le cours. En particulier, son autocovariance $\gamma_U(h)$ converge vers 0 quand $|h| \to \infty$. Posons alors $V_t := U_t + A$, où A est une variable aléatoire de carré intégrable, de variance non nulle, et *décorrélée* de Z (et donc de U). On vérifie sans peine que V est une solution de l'équation, qu'elle est stationnaire (comme somme de processus stationnaires décorrélés) et qu'elle n'est pas à décroissance rapide : en effet, par ce qui précède, son autocovariance $\gamma_V(h) = \gamma_U(h) + \mathrm{Var}(A)$ converge vers $\mathrm{Var}(A) \neq 0$ quand $|h| \to \infty$.

Remarque: on peut résoudre cet exercice sans astuce, en se rappelant la méthode du cours et en remarquant que le processus constant $t \in \mathbb{Z} \mapsto A$ est un processus harmonique de fréquence $\theta = 0$.

Exercice 3.

(1) Brièvement : comme dans le cours, on remarque (par Fubini) que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\alpha_j||\beta_{k-j}| = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\beta_{k-j}|\Big)|\alpha_j| = \|\alpha\|_1\|\beta\|_1, \tag{7}$$

ce qui montre, par inégalité triangulaire, les points demandés.

(2) Il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe $(\alpha \star \bar{\alpha})_k$ est égal à son conjugué. Or,

$$(\alpha \star \bar{\alpha})_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 :\, i+j=k} \alpha_i \bar{\alpha}_j, \quad \text{dont le conjugué vaut} \quad \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 :\, i+j=k} \bar{\alpha}_i \alpha_j. \tag{8}$$

Par symétrie des rôles de i et j, ces expressions sont égales, ce qui termine la preuve. On peut aussi montrer plus généralement que le conjugué de $\alpha \star \beta$ vaut $\bar{\alpha} \star \bar{\beta}$, et donc que le conjugué de $\alpha \star \bar{\alpha}$ vaut $\bar{\alpha} \star \alpha = \alpha \star \bar{\alpha}$ (par commutativité du produit de convolution).

(3) En utilisant la question (1) et en raisonnant par récurrence, on obtient que $\|\mathsf{P}_n(\alpha)\|_1 \leq \|\alpha\|_1^n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 0} \left\| \frac{\lambda^n}{n!} \mathsf{P}_n(\alpha) \right\|_1 \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|\lambda|^n}{n!} \|\alpha\|_1^n = \exp(|\lambda| \|\alpha\|_1), \tag{9}$$

donc la série $\mathsf{S}(\lambda, \alpha)$ est bien définie comme élément de $\ell_1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Intuitivement, il s'agit de "l'exponentielle de $\lambda\alpha$". On peut donc "deviner" que $\mathsf{S}(\lambda, \alpha)$ est inversible d'inverse $\mathsf{S}(-\lambda, \alpha)$, ce que l'on peut ensuite prouver rigoureusement par le calcul en montrant que $\mathsf{S}(\lambda, \alpha) \star \mathsf{S}(-\lambda, \alpha) = \mathbf{e}$. Une autre approche consiste à considérer la série de puissance associée à $\mathsf{S}(\lambda, \alpha)$. Attention, cependant, car le théorème d'inversion vu en cours concerne les filtres *polynomiaux* (et à valeurs réelles). Toutefois, certains arguments vus en cours peuvent être utilisés pour répondre à l'exercice.